

9.1.1 Základní kombinatorická pravidla I

Předpoklady:

Př. 1: Ve třídě je 17 děvčat a 13 kluků. Kolik máme možností jak vybrat dvojici kluk-holka, která bude mít projev na maturitním plese?

Vybíráme ze 17 holek $\Rightarrow$ 17 možností, jak vybrat holku.

Ať vybereme jakoukoliv holku, můžeme k ní přidat libovolného kluka $\Rightarrow$ 13 možností, jak vybrat kluka pro už vybranou holku $\Rightarrow$ celkem $17 \cdot 13 = 221$ možností.

Aby bylo jasnější, jak jsme příklad řešili, **budeme všechny výsledky udávat ve tvaru součinu (případně složitějšího výrazu) bez závěrečného vyčíslení** (s kalkulačkou je to otázka chvilky, z výsledku 221 nikdo nepozná, jak jsme k němu došli).

Pedagogická poznámka: Vyčíslené výsledky přesto v učebnici uvádím a v hodinách je používám. Píšu je po chvíli na tabuli, aby si žáci mohli kontrolovat své výsledky a přesto z nich moc nepoznali.

Pedagogická poznámka: Na předcházející příklad nechávám studentům jenom chvilku. Poté, co si ukážeme jeho řešení, jsou studenti v naprosté většině případů schopni postupovat dále sami.

Př. 2: V prvních ročnících studují tyto počty studentů: 1.A 30 studentů, 1.B 33 studentů, 1.C 30 studentů a 5.O 22 studentů. Kolika způsoby je možné sestavit delegaci, která obsahuje z každé třídy právě jednoho studenta?

Podobné jako předchozí příklady: 30 možností jak vybrat zástupce 1.A, ke každému takto vybranému můžeme vystřídat všechny možnosti výběru z ostatních tříd.

Celkový počet možností: $30 \cdot 33 \cdot 30 \cdot 22$
1.A 1.B 1.C 5.O

Delegaci je možné sestavit $30 \cdot 33 \cdot 30 \cdot 22 = 653400$ způsoby.

Dodatek: V předchozím příkladu je použito označení tříd na gymnáziu ve Strakoncích. Třída 5.O je kvinta osmiletého studia (patří mezi první ročníky střední školy).

Př. 3: Registrační značky motorových vozidel měly při zavedení systému v roce 2001 tvar CPC-CCCC, kde C znamená číslici od 0 do 9 a P písmeno z mezinárodní abecedy s 22 znaky (bez diakritiky a snadno zaměnitelných znaků G, O, Q, W). Kolik státních poznávacích značek tohoto tvaru bylo možné vytvořit? Kolik státních poznávacích značek bylo možné sestavit u předcházejícího systému PPP-CCCC?

Stejně jako u předchozích příkladů můžeme s výběrem jednoho konkrétního znaku na libovolném místě kombinovat všechny možnosti výběru na ostatních místech $\Rightarrow$ číslice vybíráme z 10 možností, písmena z 22 možností.

Nový systém: $10 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 22\,000\,000$.

Bývalý systém: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 106\,480\,000$.

Dodatek: Systém přidělování registračních značek měl ještě další omezení pro jednoduchost neuvedená v zadání (například číslicí na prvním místě není 0, vynechání některých kombinací, ...). V současnosti se již písmena i číslice mohou vyskytovat na libovolném místě a počet možných kombinací tím značně narostl.

Př. 4: Urči počet všech trojciferných čísel.

Trojciferné číslo má tvar například 547 .

Kolik možností na jednotlivé cifry?

1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula).
2. cifra: 10 možností (libovolná číslice).
3. cifra: 10 možností (libovolná číslice).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ (logický výsledek trojmístná čísla začínají číslem 100 a končí číslem 999 $\Rightarrow$ je jich 900).

Př. 5: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

Vybírali jsme prvky z množiny a sestavovali jsme uspořádané skupiny.

Možnosti jsme kombinovali navzájem každou s každou.

Pedagogická poznámka: I když studenti nebudou schopni zformulovat společné rysy tak, jak jsou uvedeny výše, je alespoň pokus o tuto formulaci velmi potřebný.

Všechny předchozí příklady mají společné rysy:

- vybírali jsme prvky z množin a sestavovali jsme uspořádané (záleželo na pořadí) dvojice (trojice, sedmice, trojice – obecně používáme název ***k*-tice**),
- ke každému výběru z jedné množiny jsme mohli kombinovat všechny možnosti výběrů z ostatních množin.

$\Rightarrow$ Počet možností, kterými můžeme získat výsledek, jsme spočetli jako součin možností výběru z jednotlivých množin (kvůli tomu, že k jednomu výběru z libovolné množiny, můžeme kombinovat všechny možnosti výběru z ostatních množin).

Při tomto postupu jsme používali **kombinatorické pravidlo součinu**.

Počet všech uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby atd. až *k*-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Př. 6: Urči hodnoty $k, n_1, n_2, \dots, n_k$ v příkladě 4.

Sestavovali jsme uspořádané trojice $\Rightarrow k = 3$.

Ze vztahu $9 \cdot 10 \cdot 10$ vyplývá: $n_1 = 9, n_2 = 10, n_3 = 10$.

Proč se v pravidlu kombinatorického součinu neustále opakovalo „po výběru předchozích členů“? Ukáže hned následující příklad.

Př. 7: Urči počet všech trojciferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje.

Trojciferné číslo má tvar například: 547 .

Kolik možností na jednotlivé cifry?

1. cifra: 9 možností (nemůže tam být nula, zatím nejsme nijak omezeni).
2. cifra: 9 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslici vybranou na první místo).
3. cifra: 8 možností (můžeme použít nulu, ale nemůžeme použít číslice vybrané na první dvě místa).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Př. 8: Vysvětli, proč není možné vyřešit předchozí příklad „sestavováním odzadu“ (tím, že začneme hledat nejdříve poslední cifru), které vede k nesprávnému výsledku $8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$.

Pokud bychom sestavovali číslo odzadu, platilo by:

3. cifra: 10 možností
2. cifra: 9 možností
1. cifra: nevíme kolik máme možností, protože záleží na tom, jestli už na místo druhé nebo třetí cifry byla vybrána nula ($\Rightarrow$ 8 možností pro první cifru) nebo ne ($\Rightarrow$ 7 možností pro 1. cifru).

$\Rightarrow$ Většinou se snažíme nejdříve obsazovat místa omezená nějakou podmínkou.

Pedagogická poznámka: Sestavováním odzadu bude příklad řešen v přespříští hodině. Zde je uveden pouze kvůli tomu, aby si studenti uvědomili nebezpečí, kdy není jasné v jaké situaci vlastně jsme (použití nebo nepoužití nuly).

Př. 9: Urči počet všech trojčiferných čísel, ve kterých se žádná cifra neopakuje a která:

- a) se skládají pouze z lichých cifer,
- b) se skládají pouze ze sudých cifer,
- c) mají jako druhou cifru trojku,
- d) mají liché cifry liché a sudé cifry sudé.

a) trojčiferná čísla bez opakujících se cifer, pouze z lichých cifer

1. cifra: 5 možností (5 lichých cifer).
2. cifra: 4 možnosti (nemůžeme použít číslo vybrané na první cifru).
3. cifra: 3 možnosti (nemůžeme použít čísla vybraná na první a druhou cifru).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

b) trojčiferná čísla bez opakujících se cifer, pouze ze sudých cifer

1. cifra: 4 možnosti (5 sudých cifer, nemůžeme použít nulu).
2. cifra: 4 možnosti (nemůžeme použít číslo vybrané na první cifru, můžeme použít nulu).
3. cifra: 3 možnosti (nemůžeme použít čísla vybraná na první a druhou cifru, můžeme použít nulu).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

c) trojčiferná čísla bez opakujících se cifer, která mají jako druhou cifru trojku

1. cifra: 8 možností (bez nuly a bez trojky).
2. cifra: 1 možnost (musíme použít trojku).
3. cifra: 8 možností (nemůžeme použít číslo vybrané na první cifru, nemůžeme použít trojku).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $8 \cdot 1 \cdot 8 = 64$.

d) která mají liché cifry liché a sudé cifry sudé.

1. cifra: 5 možností (nula nehrozí).

2. cifra: 5 možností (můžeme použít libovolné sudé číslo).

3. cifra: 4 možnosti (nemůžeme použít číslo vybrané na první cifru).

Všechny možnosti pro libovolnou cifru můžeme kombinovat se všemi možnostmi pro ostatní cifry $\Rightarrow$ celkový počet čísel: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

Př. 10: V počítačích se všechny údaje převádějí na čísla v binární (dvojkové) soustavě, ve které se používají pouze dvě číslice 0 a 1. Každý údaj je tak převeden na uspořádaný sled jedniček a nul. Základní jednotkou informace je pak 1 byte – upořádaná osmice jedniček a nul. Kolik znaků je možné zapsat pomocí jednoho byte informací?

Vytváříme uspořádané osmice, na každé místo máme dvě možnosti (jedničku nebo nulu) $\Rightarrow$ počet možností: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$.

Pomocí jednoho byte je možné zapsat 256 znaků.

Dodatek: 256 znaků je poměrně málo. Mezinárodní norma ASCII předepisovala zapsání prvních 128 znaků. Těchto 128 znaků obsahovalo pouze číslice, písmena anglické abecedy (malá i velká) a některé další znaky. Písmena s diakritickými znaménky se kódovala až mezi další znaky a existovalo několik různých norem, které se navzájem lišily a způsobovaly tak značné problémy. Proto nemohli lidé od počítačů přijít na jméno Janu Husovi, který odstranil spřežkový pravopis a nahradil ho háčky a čárkami.

Př. 11: Když se Ladě při matematice nedaří, sehrává hereckou etudu sestavenou ze tří částí. Nejdříve nasadí jeden z pěti vyděšených výrazů, pak následuje jedno ze čtyř vyjádření naprostého znechucení, které vyústí v jedno ze tří ztvárnění (vysoce uměleckých) naprosté bezmoci a apatie. Kolika způsoby může Lada celé pásmo sestavit? Kolika způsoby může sehrát celou hodinu, jestliže ji čekají tři mimořádně těžké příklady a nechce své obecnstvo zklamat tím, že by kteroukoli část vícekrát opakovala?

Počet možností, jak sehrát jednu etudu:

Vyděšený výraz: 5 možností.

Znechucení: 4 možnosti.

Bezmoc: 3 možnosti.

Libovolnou vybranou část může kombinovat s libovolnou kombinací ostatních částí $\Rightarrow$ celkově $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.

Počet možností jak vybrat každou další část násobíme se všemi předchozími možnostmi $\Rightarrow$ celkem $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8640$ možností, jak sehrát celou hodinu.

Př. 12: Zazvonilo a informační agentura Miroslava T. & Marie T. zahajuje svou desetiminutovou činnost. V nabídce je 8 osob mužského a 15 osob ženského pohlaví, každé vybrané osobě budou věnovány dvě minuty, pohlaví probíraných se musí

pravidelně měnit a nikdo nebude propírán dvakrát. Kolika způsoby může být sestaven program přestávky?

Za deset minut je možné probrat pět osob. Záleží na tom, zda jako první osobu zvolíme muže nebo ženu.

Jako první zvolena žena: $15 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 13$ možností.

Jako první zvolen muž: $8 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 6$ možností.

Určené počty musíme sečíst, protože agentura MT & MT může zvolit jako první ženu nebo muže a počty pro obě tyto volby se nemohou navzájem kombinovat $\Rightarrow$

$15 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 13 + 8 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 6 = 223440$ možností.

Př. 13: Petáková:

strana 145/cvičení 32

strana 145/cvičení 33

Shrnutí: Pokud můžeme způsoby výběru kombinovat nezávisle na sobě, počty možností násobíme.